基礎：I

(1) 以下で示す一階微分の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)$$

（ヒント：ロピタルの定理を用いても良い.）

(2)以下の問いに答えよ．

1) 不定積分 $\int\frac{1}{x^2+a^2}dx$ を求めよ．

ヒント）変数変換を用いて求めることが出来る．

2) $a\neq 0$，nを自然数，Cを定数とするとき，次の式が成り立つことを示せ．

$$\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx=\frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx+C$$

(3) $\boldsymbol{A}_n=[a_{ij}]$ を $a_{ij}=\begin{cases} i & (i=j)\\ 1 & (i\neq j)\end{cases}$ であるn次正方行列とする．ただし，$i,j=1,2,\cdots,n$とする．以下の問いに答えよ．

1) $\boldsymbol{A}_2$ のすべての固有値，固有ベクトルを求めよ．

2) $\boldsymbol{A}_2$ を対角化せよ．

3) $(\boldsymbol{A}_2)^5=p(\boldsymbol{A}_2)^2+q\boldsymbol{A}_2+3\boldsymbol{E}$ を満たす p,q の値を求めよ．ただし，$\boldsymbol{E}$ は2次の単位行列である．

（ヒント）ケーリー・ハミルトンの定理を用いると良い．

基礎：II

(1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$\cos^2 x \frac{dy}{dx} - \sin^2 y = 0$$

(2) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$(2x^2y + y^3)dx + (xy^2 - 2x^3)dy = 0$$

(3) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = e^{3x}$$

(4) 三次元直交座標系（デカルト座標系）O-xyz を用いる．図 1 のように，原点 O で互いに直交する x 軸，y 軸，z 軸をとる．以下の問いに答えよ．

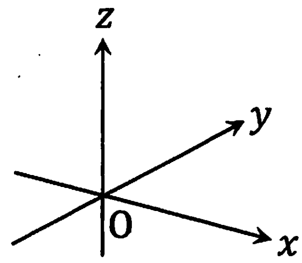

図 1

ベクトル場 $\boldsymbol{a}(x,y,z)$ を $\boldsymbol{a}(x,y,z) = \left(x+y, y-x, -z^2\right)$ とし，$2x+3y+6z=6$，$x=0$，$y=0$，$z=0$ の四平面に囲まれた三角錐領域を V とする．三角錐領域 V の体積要素を dV とするとき，体積分 $\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{a}(x,y,z)\, dV$ の値を求めよ．

基礎：Ⅲ

図 1 に示すように，ばねにつながれた質量 m の質点が，摩擦のない水平面上に置かれている．ばねに沿って x 軸をとり，ばねが自然長となる質点の位置を原点 O とする．質点の運動エネルギーをK，位置エネルギーをU，力学的エネルギーをEとし，質点の位置 x の時間 t に関する 1 階微分を$\frac{dx}{dt}$，2 階微分を$\frac{d^2x}{dt^2}$とする．ただし，原点での位置エネルギーを$U = 0$とする．円周率にはπを用いよ．以下の問いに答えよ．

(1) 質点をばねに沿って$x = x_0$となる点Pまで引っ張り，$t = 0$で静かに手を離したところ，質点は角振動数ωで単振動した．

1) 質点にはたらく復元力F_r をω，m および x のうち必要なものを用いて表せ．

2) $\frac{d^2x}{dt^2}$ をω，m および x のうち必要なものを用いて表せ．

3) 問 2)の解より，質点の位置 x を t の関数として表せ．

4) Uが Eの $\frac{1}{2}$ となる x をすべて求めよ．

5) 質点が運動を開始してから初めて $\frac{dx}{dt} = \frac{x_0\omega}{2}$ となる t と x を求めよ．

(2) つぎに，問(1)と同じばねを用い，質点に対して x 軸に沿って一定の外力 D を与えた．この外力は時間によらず働き，$D < 0$とする．質点をばねに沿って$x = x_0$となる点Pまで引っ張り，$t = 0$で静かに手を離した．

1) 質点に対する運動方程式を記述せよ．

2) 質点の位置 x を t の関数として表せ．なお，質点の最大振幅はばねの自然長より十分に小さいものとする．

3) E は，問(1)のE に比べて何倍か答えよ．ω，m，x_0 および D のうち必要なものを用いて表せ．

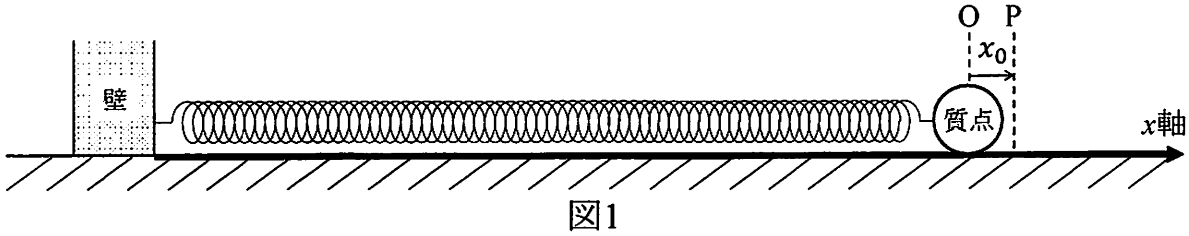

図1

基礎：Ⅳ

電極面積 S で厚さを無視できる 2 枚の長方形導体板を間隔 d で平行に置いたコンデンサについて，以下の問いに答えよ．なお，極板間は真空で，真空の誘電率を ε_0 とする．また，電極面積は十分広く，コンデンサ端部の電界の影響は無視できるとし，重力の影響はないものとする．

図 1 のように，コンデンサの電極に $\pm Q$ の電荷を与える．

(1) コンデンサの電極間電界の大きさ E を求めよ．また，コンデンサの静電容量 C を求めよ．

(2) コンデンサに蓄えられている静電エネルギー U_1 を求めよ．また，電極に働く z 軸方向の力 f_1 の大きさと向きを求めよ．

次に，図 1 のコンデンサの電極と x–y 断面の形状が同じ面積 S，厚さ $d/3$，誘電率 $4\varepsilon_0$ の帯電していない誘電体板を用意した．その誘電体板を，図 2 のように，電極に平行に端から x_0 だけ挿入する．誘電体板の上端と上部電極との距離は $d/3$ とする．また，誘電体端部の電界の影響を無視する．

(3) 誘電体がコンデンサの電極間に完全に引き込まれた場合（$x_0 = a$），コンデンサの静電容量 C_2 を求めよ．

(4) 問(3)と同様，$x_0 = a$ の場合のコンデンサの電極間の電界分布，電束密度分布，電位分布を下部電極からの距離 z（$0 \leq z \leq d$）の関数として図示せよ．なお，$z = 0$ での電位を 0 V とする．

(5) 誘電体がコンデンサの電極間に完全に引き込まれていない場合（$0 < x_0 < a$），コンデンサに蓄えられている静電エネルギー U_2 を求めよ．また，誘電体板に働く x 軸方向の力 f_2 を求めよ．

(6) いま誘電体を x 軸方向に電極の中心まで挿入した場合（$x_0 = a/2$）を考える．誘電体が挿入されている部分（$0 < x < a/2$）と挿入されていない部分（$a/2 < x < a$）の電位分布を下部電極からの距離 z（$0 \leq z \leq d$）の関数として図示せよ．なお，$z = 0$ での電位を 0 V とする．

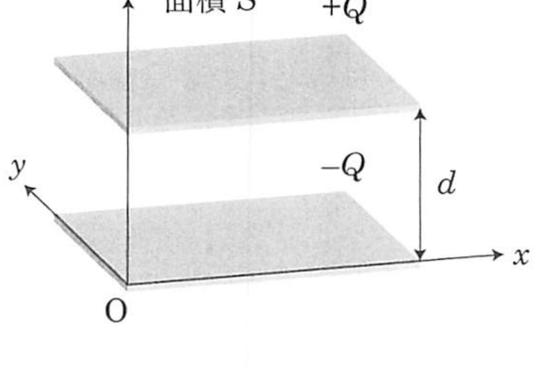

図 1

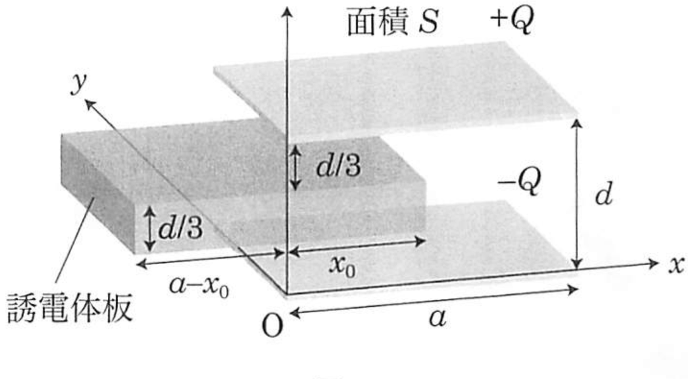

図 2

基礎：V

問題1　以下の三つの設問(1)〜(3)から<u>二つを選択</u>し解答せよ．必要ならば，つぎの物理定数および換算式を用いよ．

プランク定数 $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s　　真空の誘電率 $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ C^2 N^{-1} m^{-2}

真空中の光の速さ $c = 2.998 \times 10^8$ m s^{-1}　　電気素量 $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C

アボガドロ定数 $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ mol^{-1}　　電子の質量 $m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ kg

リュードベリ定数　$R = 1.097 \times 10^7$ m^{-1}　　ボルツマン定数 $k_B = 1.381 \times 10^{-23}$ J K^{-1}

1 J = 1 Nm = 1 kg m^2 s^{-2}　　1 eV = 1.602×10^{-19} J　　$\pi = 3.14$ としてよい．

(1) 水素原子の発光輝線スペクトルは，つぎのリュードベリの公式で表される．

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{\mathrm{m}^2} - \frac{1}{\mathrm{n}^2}\right)$$

ここで，λは波長，R はリュードベリ定数，m および n は正の整数で，m < n である．つぎの問いに答えよ．

1) 可視域（400 – 700 nm）に輝線スペクトルが観測される m の値を求めよ．また，理由も記せ．

2) 水素原子のイオン化エネルギー[eV]を求めよ．少数点以下第三位を四捨五入せよ．

(2) 反応速度に関する次の文章を読んで，以下の問 1)〜3)に答えよ．

ある物質 A の濃度を[A]，反応速度定数を k，とそれぞれ表す．また，この物質の分解反応は二次反応である．初濃度が 0.10 mol dm^{-3} のとき，50 分で 20%が分解した．

1) 反応速度定数 k [mol^{-1} dm^3 s^{-1}]を求めよ．

2) 半減期（初濃度が半分に減少するのに要する時間）[s]を求めよ．

3) 初濃度が 0.020 mol dm^{-3} のとき，20%分解するのに要する時間[s]を求めよ．

(3) 1 mol の塩化ナトリウム（NaCl）結晶に関する次の文章を読んで，以下の問 1)〜3)に答えよ．

NaCl 結晶はイオン結晶の一つで，ナトリウムイオン（Na^+）と塩化物イオン（Cl^-）とから形成されており，これらはそれぞれ $\boxed{\text{ア}}$ 原子および $\boxed{\text{イ}}$ 原子と同じ電子配置をと

次ページに続く

基礎: V (続き)

る. 1 mol の NaCl 結晶全体のエネルギー$U(r)$は次式で与えられる.

$$U(r) = N_A \left[M\frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + B\exp\left(-\frac{r}{\rho}\right)\right] \qquad \text{(i)}$$

ここで, N_Aはアボガドロ定数, ε_0は真空の誘電率, eは電気素量, Bとρは定数, rは最隣接のNa^+とCl^-との距離, をそれぞれ表す. 式(i)の第1項および第2項は, それぞれ[ウ]および[エ]に由来する. また, Mはマーデルング定数とよばれ, [オ]によって決まる. 最隣接のNa^+とCl^-が最も安定な最近接距離r_0で相互作用している場合, $U(r_0) = U_0$は次の式で与えられる.

$$U_0 = M\frac{-N_A e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right) \qquad \text{(ii)}$$

1) 空欄[ア]〜[オ]にあてはまる最も適切な語句を下の欄の①〜⑳から選び, 数字で答えよ.

①ファンデルワールス力, ②共有結合, ③イオン間のクーロン力, ④水素結合, ⑤運動エネルギー, ⑥配位結合, ⑦電子親和力, ⑧イオン化エネルギー, ⑨斥力, ⑩陰イオンと陽イオンの大きさ, ⑪結晶構造, ⑫格子定数, ⑬元素, ⑭Mg, ⑮Ne, ⑯He, ⑰Xe, ⑱Ar, ⑲F, ⑳Li

2) 式(i)から式(ii)を導出せよ.

3) 1.00 mol の NaCl 結晶の$-U_0$ [J mol^{-1}]を有効数字三桁で求めよ. ただし, $r_0 = 0.280$ nm, $M = 1.75$, $r_0/\rho = 9.40$, とせよ.